



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado
Segundo semestre de 2024

Eletrodinâmica Clássica

05/08/2024 - 09:00 às 12:00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1: CAMPO ELÉTRICO

Uma maneira conveniente de visualizar um dado campo elétrico \mathbf{E} é através das linhas de campo. Uma linha de campo é uma curva que tangencia, em cada um dos seus pontos, o campo elétrico \mathbf{E} atuante nestes pontos. Se $d\mathbf{l}$ é um elemento vetorial de comprimento infinitesimal da linha de campo elétrico, como \mathbf{E} é paralelo a $d\mathbf{l}$, temos que

$$\mathbf{E} = \gamma d\mathbf{l}, \quad (1)$$

onde γ é uma constante positiva.

(a) (20%) Utilizando coordenadas retangulares (x, y) e a Eq. (1), obtenha a equação diferencial que descreve as linhas de campo $\mathbf{E} = (E_x \hat{x} + E_y \hat{y})$ no plano $x - y$

$$\frac{dy}{dx} = f(E_x, E_y),$$

onde \hat{x} e \hat{y} são vetores unitários e f é uma função de E_x e E_y .

(b) (20%) Considere uma carga elétrica pontual positiva, localizada na origem O de um sistema de coordenadas retangulares (x, y) . Resolva a equação diferencial calculada em **(a)** e obtenha a equação das curvas que descrevem as linhas de campo \mathbf{E} geradas por esta carga pontual.

(c) (20%) Utilizando coordenadas polares (r, θ) no plano $x - y$ (onde r é a distância radial até a origem O e θ é o ângulo formado entre a direção radial e o eixo horizontal x) e a Eq. (1), obtenha a equação diferencial que descreve as linhas de campo $\mathbf{E} = (E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta})$ no plano determinado pelos vetores unitários \hat{r} e $\hat{\theta}$.

(d) (40%) Considere um dipolo elétrico pontual de momento de dipolo $\mathbf{p} = p \hat{y}$, localizado na origem O do sistema de coordenadas polares (r, θ) adotado no item **(c)**. Sabe-se que o potencial elétrico gerado pelo dipolo elétrico é dado por $V_{\text{dip}} = p \sin\theta / (4\pi\epsilon_0 r^2)$, onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo. Resolva a equação diferencial calculada em **(c)** e obtenha a equação das curvas que descrevem as linhas de campo \mathbf{E} geradas por este dipolo elétrico.

QUESTÃO 2: PROBLEMAS DE CONTORNO EM MAGNETOSTÁTICA

Um material magnético tem a forma de um cilindro circular de comprimento L e raio a . O cilindro tem magnetização permanente $\mathbf{M} = M_0 \hat{z}$, uniforme em todo o seu volume e paralela ao eixo z . Considere a origem do sistema de coordenadas no centro de massa do cilindro.

(a) (25%) Mostre que, na ausência de correntes livres no sistema, podemos escrever o campo magnético $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ gerado pelo cilindro, em termos de um potencial magnético escalar $\Phi_M(\mathbf{r})$. Mostre também que Φ_M satisfaz a equação de Poisson.

(b) (45%) Determine o potencial escalar magnético $\Phi_M(\mathbf{r})$ ao longo do eixo do cilindro (eixo z), dentro e fora do material. Utilize coordenadas cilíndricas.

(c) (30%) Determine o campo magnético $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ e a indução magnética $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ao longo do eixo z , dentro e fora do material.

Dados:

$$\Phi_M(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da'$$

$$\int_0^a \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + A^2}} = \sqrt{x^2 + A^2} \Big|_0^a$$

QUESTÃO 3: TRANSFORMAÇÕES DE CALIBRE

Considere uma carga elétrica pontual $+q$ em repouso, localizada na origem de um sistema de coordenadas esféricas. Todo o sistema está imerso no vácuo, de permissividade elétrica ε_0 . Para esta situação, os potenciais elétrico e magnético são dados por

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{e} \quad \mathbf{A} = 0,$$

respectivamente, onde $r = |\mathbf{r}|$.

(a) (10%) Calcule os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} correspondentes a estes potenciais.

(b) (30%) Considere que a função

$$\lambda(r, t) = \frac{qt}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

gera uma transformação de calibre. Calcule as expressões dos novos potenciais V' e \mathbf{A}' gerados por esta transformação.

(c) (30%) Calcule as expressões para os campos transformados \mathbf{E}' e \mathbf{B}' associados aos potenciais V' e \mathbf{A}' calculados no item (b). As expressões obtidas para \mathbf{E}' e \mathbf{B}' fazem sentido? Justifique brevemente sua resposta.

(d) (30%) Os potenciais transformados V' e \mathbf{A}' calculados no item (b) representam uma situação física diferente da descrita pelos potenciais V e \mathbf{A} originalmente dados? Ou seja, existe alguma inconsistência entre as expressões obtidas para os potenciais originais e os transformados? Justifique brevemente sua resposta.

Dado:

$$\frac{\hat{r}}{r^2} = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right)$$

QUESTÃO 4: ONDAS PLANAS EM MEIOS NÃO-CONDUTORES

(a) (30%) Escreva as equações de Maxwell para um meio linear não condutor (densidades de carga e corrente nulas), com permissividade elétrica ϵ_1 e permeabilidade magnética μ_1 constantes. Mostre que o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ satisfaz uma equação de onda, e escreva a expressão para a velocidade v da onda em termos de ϵ_1 e μ_1 .

(b) (30%) Considere agora uma onda eletromagnética plana propagando-se na direção z , com número de onda k e frequência ω . Escreva as soluções complexas de onda plana $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ e $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$, cujas partes reais são os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} . Em seguida, sabendo que a onda eletromagnética é transversal, ou seja $E_z = B_z = 0$, utilize a lei de Faraday para mostrar que os campos estão relacionados pela expressão $\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{v}(\hat{z} \times \tilde{\mathbf{E}})$, onde $v = \omega/k$ é a velocidade da onda (velocidade da luz) no meio.

(c) (40%) Considere uma onda plana propagando-se na direção z e polarizada na direção x (ou seja, $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ está na direção \hat{x}). A onda incide perpendicularmente a uma interface plana, localizada no plano $z = 0$, que define a fronteira entre dois meios lineares com permissividades e permeabilidades dadas por ϵ_1, μ_1 para $z < 0$ e ϵ_2, μ_2 para $z > 0$. Obtenha as expressões para as amplitudes das ondas refletidas e transmitidas pela interface, em função da amplitude da onda incidente e das constantes de permissividade e permeabilidade dos dois meios.

Dados:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$E_1^{\parallel} = E_2^{\parallel}, \quad \frac{1}{\mu_1} B_1^{\parallel} = \frac{1}{\mu_2} B_2^{\parallel}$$
